UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2019-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **12/07/2019**
DACBHCC **12:00-13:50 h**

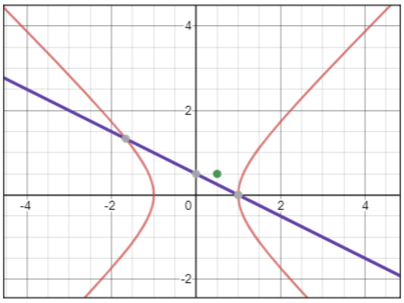
EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Docentes: Garrido Rosa – Castro Robert – Pantoja Hermes – Carlos Moreno

Problema 1

Sea el sistema no lineal



$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$x + 2y = 1$$

a) **(2P)** Determine el algoritmo del **Punto Fijo** para sistemas de ecuaciones no lineales y compruebe la convergencia usando como punto inicial (0.5; 0.5). (**No realice iteraciones**).

b) **(1P)** Determine el algoritmo de Newton Raphson para sistemas aplicado a este problema.

c) **(1P)** Realice 02 iteraciones usando Newton Raphson empezando con el punto inicial (0.5 ;0.5) y determine el error cometido en cada iteración.

d) **(1P)** Complete el siguiente Script en MATLAB que permita localizar las raíces del sistema de ecuaciones no lineales.

```
clc
clf
x=[-2:0.01:2];
y=[-2:0.01:2];
[X,Y]=meshgrid(x,y)
Z1=X.^2-Y.^2-1;
---------------------------

-----------------------
contour(X,Y,Z1,[0 0],'r')
hold on
---------------------------

-----------------------
grid on
```

Problema 2

Un móvil se mueve en línea recta de acuerdo a la siguiente tabla:

t(seg)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y(m)	1.3	1.5	1.8	2	2.6	3.2

a) **(2P)** Determine un ajuste por mínimos cuadrados mediante el uso de la ecuación normal de la forma: $y=exp(c_1*t+c_2*exp(t))$

b) **(1P)** Determine el factor de regresión y comente su resultado

c) **(1P)** Estime la velocidad el móvil en t=0.6 seg.

d) **(1P)** Implemente un script en MATLAB resolver este problema

Problema 3

Dada la integral:

$$\int_0^5 \left[\left(x^2-1\right)^2 - x^5\right] \mathrm{d}x$$

a) **(2P)** Usando el método de la Cuadratura Gaussiana ¿Cuántos puntos de la malla de integración (nodos) son necesarios para integrar la expresión anterior en forma exacta (sin considerar los errores de redondeo)? Justifique sin resolver.
b) **(1P)** Usando el resultado de a). Calcular la integral exactamente con la fórmula de la cuadratura de Gauss. Pesos y puntos de apoyo se dan en la siguiente tabla.

$n=2$	$x_1 = 0.577350269189626$	$w_1 = 1$
$n=3$	$x_1 = 0.774596669241483$	$w_1 = 0.555555555555556$
	$x_2 = 0$	$w_2 = 0.888888888888889$
$n=4$	$x_1 = 0.861136311594053$	$w_1 = 0.347854845137454$
	$x_2 = 0.339981043584856$	$w_2 = 0.652145154862546$
$n=5$	$x_1 = 0.906179845938664$	$w_1 = 0.236926885056189$
	$x_2 = 0.538469310105683$	$w_2 = 0.478628670499366$
	$x_3 = 0$	$w_3 = 0.568888888888889$

Observación los valores de los ceros de Legendre, xi, están expresados sin signo.

c) **(1P)** Determine el error cometido al usar la cuadratura cerrada de Newton Cotes que corresponde a una cúbica.
d) **(1P)** La función en MATLAB, Q = CG(f,x,w,a,b) , determina el valor de integral (Q) en forma aproximada usando el método de la Cuadratura Gaussiana ,CG , el vector x de nodos, y el vector de pesos, w, son conocidos, f es la dirección del integrando, a y b son los límites de la integral. Diseñe el código de la función CG en MATLAB. Defina la función del integrando en línea y todos los vectores necesarios para usar en la función.

Problema 4

Un paracaidista de masa ***M*** kg salta desde un avión en ***t = 0***. Consideremos que la velocidad vertical inicial del paracaidista es cero en ***t = 0*** y que la caída es vertical. Si el arrastre aerodinámico está dado por ***Faire = c v²***, donde c es una constante y ***v*** es la velocidad vertical (positiva hacia abajo), asuma ***M*** = 70 kg, ***c*** = 0.27 kg/m, ***g***=9.8 m/s^2.

a) **(1 P)** Determine la ecuación diferencial que resuelva el problema
b) **(2 P)** Halle la velocidad del paracaidista para t entre 0 y 0.5, aplicando Euler con un paso h=0.1 seg.
c) **(1 P)** Halle el error para cada punto de b) a partir de la solución analítica.
d) **(1 P)** Crear un programa en MATLAB para resolver a) y b).

Solucionario

Problema 1

a)

$$x = \sqrt{y^2+1} = g_1(x;y)$$
$$y = \frac{1-x}{2} = g_2(x;y)$$

Prueba de la convergencia:

$$G(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$J(0{,}5;0{,}5) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4472 \\ -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$||J(0{,}5;0{,}5)||_\infty = 0{,}5 < 1$$

Por lo tanto, converge.

Algoritmo del Punto Fijo

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i^2+1}$$
$$y_{i+1} = \frac{1-x_i}{2}$$

b)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$F(x;y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2-1 \\ x+2y-1 \end{pmatrix} \qquad J_F = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x+y} & \frac{y}{2x+y} \\ -\frac{1}{2(2x+y)} & \frac{x}{2x+y} \end{pmatrix}$$

Obteniendo, el algoritmo de Newton Raphson:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2x^{(k)}+y^{(k)}} & \frac{y^{(k)}}{2x^{(k)}+y^{(k)}} \\ -\frac{1}{2(2x^{(k)}+y^{(k)})} & \frac{x^{(k)}}{2x^{(k)}+y^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x^{(k)})^2 - (y^{(k)})^2 - 1 \\ x^{(k)} + 2y^{(k)} - 1 \end{pmatrix}$$

a) Realizando dos iteraciones:

Iteración 01:

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2x^{(0)}+y^{(0)}} & \frac{y^{(0)}}{2x^{(0)}+y^{(0)}} \\ -\frac{1}{2(2x^{(0)}+y^{(0)})} & \frac{x^{(0)}}{2x^{(0)}+y^{(0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x^{(0)})^2 - (y^{(0)})^2 - 1 \\ x^{(0)} + 2y^{(0)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad ||e^{(1)}||_\infty = \frac{1}{2}$$

Iteración 02:

$$\begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2x^{(1)}+y^{(1)}} & \frac{y^{(1)}}{2x^{(1)}+y^{(1)}} \\ -\frac{1}{2(2x^{(1)}+y^{(1)})} & \frac{x^{(1)}}{2x^{(1)}+y^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x^{(1)})^2 - (y^{(1)})^2 - 1 \\ x^{(1)} + 2y^{(1)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ||e^{(2)}||_\infty = 0$$

d) Script Completo

```
clc
clf
x=[-2:0.01:2];
y=[-2:0.01:2];
[X,Y]=meshgrid(x,y)
Z1=X.^2-Y.^2-1;
Z2=X+2*Y-1;
contour(X,Y,Z1,[0 0],'r')
hold on
contour(X,Y,Z2,[0 0],'b')
grid on
```

Problema 2

a) Tomando logaritmos:

$$Y=Ln(y)=c_1*t+c_2*exp(t)$$

Escribiendo en forma matricial para cada punto:

$$\begin{bmatrix} 0 & e^0 \\ 0.2 & e^{0.2} \\ 0.4 & e^{0.4} \\ 0.6 & e^{0.6} \\ 0.8 & e^{0.8} \\ 1 & e^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ln(1.3) \\ Ln(1.5) \\ Ln(1.8) \\ Ln(2) \\ Ln(2.6) \\ Ln(3.2) \end{bmatrix}$$

M*C=Y

Aplicando la ecuación normal:

$$M^T*M*C=M^T*Y$$

$$\begin{bmatrix} 2.2 & 6.433 \\ 6.433 & 20.3796 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6597 \\ 8.1858 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.2605 \end{bmatrix}$$

El ajuste es:

y=exp(0.4472*t+0.2605*exp(t))

b)

Ym= 0.6779

$$Ys=Ln(y)=c_1*t+c_2*exp(t)=$$

0.2605 0.4076 0.5675 0.7430 0.9375 1.1553

$$R^2 = \frac{\sum(Ys-Ym)^2}{\sum(Y-Ym)^2} = 0.9846$$

El ajuste es aceptable

c)

$$y'(t)=exp(c_1*t+c_2*exp(t))*(c_1+c_2*exp(t))$$

y'(0.6)= 1.9380 m/s

d)

```
% p2.m
clc, clear all, t=0:0.2:1, c1=0.5, c2=0.25
y=[1.3 1.5 1.8 2 2.6 3.2]
Y=log(y)'
M=[t' exp(t)']
N=M'*M
P=M'*Y
c=N\P   %     c1=0.4472   c2=0.2605
Ym=mean(Y)
Ys=c(1)*t+c(2)*exp(t)
r2=sum((Ys-Ym).^2)/sum((Y-Ym).^2)
t=0.6
vel=exp(c(1)*t+c(2)*exp(t))*(c(1)+c(2)*exp(t))
```

Problema 3

a) **Se dispone de n incógnitas correspondientes a los ceros de legendre xi y n pesos de la cuadratura. Por lo que el grado de polinomio será de 2n-1=5 (grado del integrando) para que la cuadratura sea exacta. Se necesitaría 3 puntos.**

b) **Calculo de la Integral usando Gauss- Legendre.**

i	**xi**	**Wi**	**t=** $5(x+1)/2$	**F(ti)**	**Wi.F(ti)**
1 **2** **3**	-$\sqrt{3/5}$ **0** $\sqrt{3/5}$	**5/9** **8/9** **5/9**	**0.5635** **2.5000** **4.6129**	**0.4089** **-70.09** **-1370**	0.2272 -62.3056 -760.9216
				$\sum$	**(5/2)*(-823)** **= -2,057.5**

c) Error cometido usando 4 puntos con Simpson 3/8

N=3*M=3 M=1 cúbica

h=(5-0)/3=5/3

$f^{iV}(\varepsilon) = 24 - 120t \rightarrow M_4 = -576$

$E = \left|\frac{3h^5 f^{iV}(\varepsilon)}{80}\right| = 277.77$ Error muy alto.

d)

```
f= @(t)(t.^2-1).^2-t.^5
x= [-0.774596669241483 0  0.774596669241483]
w= [0.555555555556   0.888888888889   0.555555555556]
a= 5  ;  b=0;

function Q=CG(f,x,w,a,b)

t=((b-a)*x+(b+a))./2;

y=f(t);

Q=(b-a)/2*sum(w.*y);
```

Problema 4

a) Aplicando la segunda Ley de Newton

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{M}v^2 + g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{0.27}{70}v^2 + 9.8$$

$$v(0) = 0$$

b) Aplicando Euler:

h=0.1

Para n=0, 1, 2, 3, 4

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$v_{n+1} = v_n + h\left(-\frac{0.27}{70}v_n^2 + 9.8\right)$$

t	vEuler
0.	0.
0.1	0.98
0.2	1.9596296
0.3	2.9381484
0.4	3.9148186
0.5	4.8889072

c) Solución analítica y error

a=0.27/70

b=9.8

$$v(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\, tanh\left(\sqrt{ab}\, t\right)$$

T	vEuler	vExacto	Error Abs
0.	0.	0.	0.
0.1	0.98	0.9798765	0.0001235
0.2	1.9596296	1.9590128	0.0006168
0.3	2.9381484	2.9366706	0.0014778
0.4	3.9148186	3.9121164	0.0027022
0.5	4.8889072	4.8846231	0.0042841

d)

```
% funcion euler1.m para resolver el problema
function [x y]=euler1(n,a,b,h)
x=a:h:n*h;
y=zeros(n,1);
y(1)=b;
for k=1:n
f=fe1(x(k),y(k));
y(k+1)=y(k)+h*f;
end

% funcion fe1.m para crear la ecuación.
function y1=fe1(x,y)
y1=(-0.27/70)*y^2+9.8;
```